

基于 t 混合模型和 Greedy EM 算法的 彩色图像分割

汪慧兰^{1),2)} 陈思宝¹⁾ 罗斌¹⁾

¹⁾(安徽大学计算智能与信号处理教育部重点实验室,合肥 230039)

²⁾(安徽师范大学物理与电子信息学院,芜湖 241000)

摘要 为了快速更好地进行彩色图像分割,以图像的颜色、纹理及空间位置作为综合特征,基于 t 混合模型,提出了一种自适应的图像分割方法,即先采用贪婪的 EM (Greedy EM) 算法估计混合模型的参数,然后根据贝叶斯最小错误率准则对图像进行分割。由于 t 混合模型的稳健性和 Greedy EM 算法对于数据的初始化不敏感,且能收敛到全局最优,因此与其他的方法相比,不仅速度提高,而且能取得更好的分割结果。

关键词 t 混合模型 Greedy EM 图像分割

中图分类号: TP391.41 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2007)05-0882-06

Color Image Segmentation Based t Mixture Model and Greedy EM

WANG Hui-lan^{1),2)}, CHEN Si-bao¹⁾, LUO Bin¹⁾

¹⁾(Key Lab of Intelligent Computing and Signal Processing, Anhui University, Hefei 230039)

²⁾(School of Physics and Electronic Information, Anhui Normal University, Wuhu 241000)

Abstract To obtain more efficient performance, taking color, texture and position feature in the images as their comprehensive features, an adaptive image segmentation method is proposed based on t mixture model and Greedy EM. The parameters of t mixture are estimated by Greedy EM algorithm. Image is segmented according to Bayes minimization error principle. T mixture model is robust and Greedy EM algorithm is less sensitive to initial parameters therefore it may be converged to the global optimum. Compared to other methods on image segmentation, the proposed method can accomplish improved efficiency and better experimental results.

Keywords t mixture model, Greedy EM, image segmentation

1 引言

图像分割就是按照一定的相似性准则把图像分成几个有意义、互不重叠的区域,并且在同一个区域内,图像的颜色、灰度、纹理是相似的,而在不同的区域内,图像的特征则明显不同。它是解决许多其他计算机视觉问题的先决条件,如图像分类、基于内容的图像检索和目标识别等。鉴于图像分割是一个具有挑战性的问题,因此已吸引了很多学者从事这方面的研究,现已提出了各种各样的分割方法。目

前,彩色图像分割已有多种方法,从统计学的角度看,正确分割观察到的图像,就是以最大概率得到图像的物体组合;从贝叶斯定理看,就是要求具有最大后验概率(maximum a posteriori, MAP)的分布。

有限混合模型因为它的极度柔韧性而使其不论在理论还是在应用上都倍受青睐。在过去的几十年里,它的应用已延伸到诸多领域,如模式识别、计算机视觉、信号与图像分析、机器学习等;而多维高斯混合模型则由于其具有易分析处理、渐进性及计算方便等特点,因此成为了当前普遍存在的统计模型^[1]。但在许多的应用中,由于高斯分布的尾部比需要的要轻,

基金项目:国家自然科学基金项目(60375010);教育部人文社会科学项目(05JC870012);安徽省人才开发基金项目(2001z021)

收稿日期:2005-12-12;改回日期:2006-04-10

第一作者简介:汪慧兰(1978~),女,讲师,硕士研究生。主要研究方向为图像处理、基于内容的图像检索等。E-mail:whllhw2003@163.com

而且参数的估计会受到关于分量的非典型观测样本的严重影响,因此这时采用t混合模型是一种标准的选择,因为t分布比高斯分布有较重的尾部。

与其他的数值方法(牛顿法、梯度法)相比,期望最大(expectation maximization, EM)算法具有简单、易实现、稳定等优点,已广泛用于不完全数据的最大似然估计和混合模型问题。该算法由于通过MAP或ML(maximum likelihood)方法拟合有限混合模型时,被极大地简化为两步(即E步和M步),从而能很方便地估计出它们的参数。但是,由于EM算法本质上是一种迭代的方法,故具有以下局限性:(1)它假定混合成分数为已知的;(2)迭代的结果需依赖于初始值;(3)可能收敛到局部最大值点或可能收敛到参数空间的边界^[2]。为了克服上述问题,Ueda等提出了分裂-融合的EM(split merge EM)算法^[3],Zhang等还采用了SMEM算法进行了图像分割的实验^[4],但其计算复杂度为 $O(nk^3)$,Figueiredo和Jain提出了component-wise EM算法^[5],它先从大的成分数开始,然后根据小的混合系数进行成分的消灭,但这种方法对于开始成分数的选择不好确定,而且当分量的混合比例差别较大时,该方法可能失败。

本文利用图像的颜色、纹理及空间位置作为综合特征,基于稳健的t混合模型,提出了一种自适应的图像分割方法。该方法先采用Greedy EM算法估计混合模型的参数,然后根据贝叶斯最小错误率准则对图像进行分割。Greedy EM算法是先从一个最佳的成分混合开始,然后逐步插入新的成分,直到获得最佳的成分数。由于一个最佳成分通过分析很容易得到,因此对于参数的初始化不敏感,且计算复杂度为 $O(nk^2)$ 。这样不仅提高了参数估计的准确性和速度,而且改善了图像分割的结果。

2 多维t混合模型及其EM算法

假设 $X = (x_1^T, x_2^T, \dots, x_n^T)^T$ 为一个长度为 n 的 d 维特征向量集,则 K 个成分的多维t混合分布的混合概率密度函数为

$$f(x; \Theta) = \sum_{j=1}^K \alpha_j \varphi_j(x; \theta_j) \quad (1)$$

其中, α_j 代表混合系数,即各混合成分的先验概率($\sum_{j=1}^K \alpha_j = 1$), θ_j 为未知参数向量($\theta_j = \{\mu_j, \Sigma_j,$

$\gamma_j\}$), μ_j 为均值向量, Σ_j 为方差矩阵, γ_j 为自由度, $\Theta = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K\}$, $\varphi_j(x; \theta_j)$ 为给定的来自第 j 个t混合分量时的观测值 x_i 的 p 维类概率密度函数(p. d. f),即

$$\varphi_j(x; \theta_j) = t_p(x; \mu_j, \Sigma_j, \gamma_j) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_j + p}{2}\right) |\Sigma_j|^{-1/2}}{(\pi\gamma_j)^{p/2} \Gamma\left(\frac{\gamma_j}{2}\right)} \times \left\{1 + \frac{\delta(x, \mu_j; \Sigma_j)}{\gamma_j}\right\}^{-\frac{\gamma_j + p}{2}} \quad (2)$$

其中, $\delta(x, \mu_j; \Sigma_j) = (x - \mu_j)^T \Sigma_j^{-1} (x - \mu_j)$, γ_j 为自由度, $\Gamma(s)$ 为第2类Euler积分或称为Gamma函数,其定义为

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx, (s > 0) \quad (3)$$

最大似然估计的基本假设是给定一组独立同分布样本不完全数据向量集 $X = (x_1^T, x_2^T, \dots, x_n^T)^T$,则完全数据向量集为 $Y = (X^T, z_1^T, z_2^T, \dots, z_n^T)^T$,其中 $z_i = (z_{i,1}, z_{i,2}, \dots, z_{i,k})^T$,其中 $z_{i,j}$ 为根据观测值 x_i 是否属于第 j 个成分取值为1或0的标记向量,则完全数据集的对数似然为

$$L(\Theta | Y) = \log f(Y | \Theta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^K z_{i,j} \log[\alpha_j \varphi_j(x_i; \theta_j)] \quad (4)$$

获得ML估计的混合参数最通常选择的算法为EM算法,其基本的思想是^[6]

$$E \text{ 步: } Q(\Theta, \hat{\Theta}^{(t)}) = E[L(\Theta | Y) | X, \hat{\Theta}^{(t)}] \quad (5)$$

$$M \text{ 步: } \hat{\Theta}^{(t+1)} = \underset{\Theta}{\text{argmax}} Q(\Theta, \hat{\Theta}^{(t)}) \quad (6)$$

然后应用E步和M步就能得到 Θ 的ML估计。具体对于t混合,可采用EM算法进行参数估计,其过程如下:

此时设完全数据向量集为 $\tilde{Y} = (X^T, z_1^T, z_2^T, \dots, z_n^T, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$,这里引入了另一组丢失数据 $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$,它定义为,在给定的 ω_i 及 $z_{i,j} = 1$ 时有

$$X_i | (\omega_i, z_{i,j} = 1) \sim N_p(\mu_j, \Sigma_j | \omega_i)$$

且给定 $z_{i,j} = 1$ 时,有

$$W_i | (z_{i,j} = 1) \sim \text{gamma}\left(\frac{\gamma_j}{2}, \frac{\gamma_j}{2}\right) \quad (7)$$

则相应的完全数据向量的对数似然为

$$L(\Theta | \tilde{Y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^K z_{i,j} \left\{ \log \varphi_j\left(x_i, \mu_j; \frac{\Sigma_j}{\omega_i}\right) + \log g\left(\omega_i, \frac{\gamma_j}{2}, \frac{\gamma_j}{2}\right) + \log(\alpha_j) \right\} \quad (8)$$

在这里, $\varphi_j\left(x_i, \mu_j; \frac{\Sigma_j}{\omega_j}\right)$ 为均值向量为 μ 、方差矩阵为 $\frac{\Sigma}{\omega}$ 的 p -维 Gauss 分布的 p. d. f., $g\left(\omega_j, \frac{\gamma_j}{2}, \frac{\gamma_j}{2}\right)$ 是 Gamma 分布 $\text{gamma}\left(\frac{\gamma_j}{2}, \frac{\gamma_j}{2}\right)$ 的 p. d. f.

Peel 和 McLachlan 导出了 K 个分量 (即 K 个成分) 多维 t 混合模型参数 θ 的 ML 估计^[7], 即

E 步: 来自第 j 个分量的观测样本 x_i 的后验概率为

$$\begin{aligned} \tau_{i,j}^{(t)} &= P(j; x_i, \theta^{(t)}) = \frac{\alpha_j^{(t)} \varphi_j(x_i; \theta_j^{(t)})}{\sum_{i=1}^k \alpha_i^{(t)} \varphi_i(x_i; \theta_i^{(t)})} \\ &= \frac{\alpha_j^{(t)} t_p(x_i; \mu_j^{(t)}, \Sigma_j^{(t)}, \gamma_j^{(t)})}{\sum_{i=1}^k \alpha_i^{(t)} t_p(x_i; \mu_i^{(t)}, \Sigma_i^{(t)}, \gamma_i^{(t)})} \end{aligned} \quad (9)$$

W_i 的条件期望为

$$\omega_{i,j}^{(t)} = E[W_i | \omega_i, z_{i,j} = 1] = \frac{\hat{\gamma}_j^{(t)} + p}{\hat{\gamma}_j^{(t)} + \delta(x_i, \mu_j^{(t)}; \Sigma_j^{(t)})} \quad (10)$$

M 步: 迭代 $t+1$ 次后, 混合参数的更新估计为

$$\alpha_j^{(t+1)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tau_{i,j}^{(t)} \quad (11)$$

迭代 $t+1$ 次后的均值向量的更新估计为

$$\mu_j^{(t+1)} = \frac{\sum_{i=1}^n \tau_{i,j}^{(t)} \omega_{i,j}^{(t)} x_i}{\sum_{i=1}^n \tau_{i,j}^{(t)} \omega_{i,j}^{(t)}} \quad (12)$$

迭代 $t+1$ 次后的方差矩阵的更新估计为

$$\Sigma_j^{(t+1)} = \frac{\sum_{i=1}^n \tau_{i,j}^{(t)} \omega_{i,j}^{(t)} (x_i - \mu_j^{(t+1)}) (x_i - \mu_j^{(t+1)})^T}{\sum_{i=1}^n \tau_{i,j}^{(t)}} \quad (13)$$

γ_j 的 $(t+1)$ 次迭代后的估计 $\gamma_j^{(t+1)}$ 是非线性方程 $-\psi\left(\frac{\gamma_j}{2}\right) + \log\left(\frac{\gamma_j}{2}\right) + 1 + \frac{1}{n_j^{(t)}} \sum_{i=1}^n \tau_{i,j}^{(t)} (\log \omega_{i,j}^{(t)} - \omega_{i,j}^{(t)}) +$

$$\psi\left(\frac{\gamma_j^{(t)} + p}{2}\right) - \log\left(\frac{\gamma_j^{(t)} + p}{2}\right) = 0 \quad (14)$$

的解。其中, $n_j^{(t)} = \sum_{i=1}^n \tau_{i,j}^{(t)}$ 和 $\psi(s) = \frac{d \log \Gamma(s)}{dt}$

3 Greedy EM 算法

Greedy EM 算法的基本思想为: 先从一个最佳

的成分混合概率密度函数开始, 通过启发式搜寻获取最佳的新的成分; 然后逐步插入新的成分, 直到得到最佳的成分数。应用传统的 EM 算法进行迭代, 直到满足一个收敛的准则。其中的收敛准则可以是具体的最大成分数, 也可以是任何模型的选择准则如 BIC (bayes information criterion), AIC (akaike information criterion)。具体的算法步骤如下^[8]:

(1) 计算最佳的一个成分的混合概率密度函数 f_1 (服从最大对数似然), 设 $k=1$;

(2) 寻找最佳的新的成分的概率密度函数 $\varphi(x; \theta^{new})$ 和对应的混合权值 α^{new} , 即

$$\{\theta^{new}, \alpha^{new}\} = \underset{\{\theta, \alpha\}}{\operatorname{argmax}} \sum_{i=1}^n \log[(1-\alpha)f_k(x_i) + \alpha\varphi(x_i; \theta)] \quad (15)$$

并保持 f_k 不变;

(3) 设 $f_{k+1}(x) = (1-\alpha^{new})f_k(x) + \alpha^{new}\varphi(x; \theta^{new})$ 和 $k=k+1$;

(4) 用 EM 算法更新 f_k , 直到收敛;

(5) 若满足收敛准则就退出, 否则转到步骤 (2)。

很明显, 在这个算法中, 最关键的一步就是某一成分的插入 (步骤 2)。根据后验概率, 可将数据集 \mathcal{X} 分成 k 个不连接的子集 $A_i = \{x \in \mathcal{X} : i = \operatorname{argmax}_j \{P(j|x)\}\}$ 。对于每一个子集 $A_i (i=1, \dots, k)$ 可构建 m 个候选数据。在实验中是采用 $m=10$ 。这样是为了加快算法的运算速度。Greedy EM 算法是利用初始参数对 $\{(\theta_i, \alpha_i)\} (1 \leq i \leq km)$ 进行 km 次偏 EM 全局搜索来得到最佳的新的成分。具体来说, 就是将新的成分概率密度函数 $\varphi(x; \theta^{new})$ 加入到第 k 个成分混合概率密度函数 f_k , 对于每一个 k , 先给定 f_k , 再通过 θ 和 α 来最大化对数似然 $L_{k+1} =$

$\sum_{i=1}^n \log(f_{k+1}(x_i))$, 即可得到候选成分概率密度函数 $\varphi(x; \hat{\theta})$ 的最大似然参数 $\{\theta^{new}, \alpha^{new}\}$, 同时使 k 增 1; 然后在下面的步骤中, 用传统的 EM 算法更新 f_k , 直到收敛。如果对数似然的改变低于某一阈值或达到最大的迭代次数, 则停止算法运算, 否则进行偏搜索继续寻找新的最佳成分。对于 Greedy EM 算法来说, 如果用传统的 EM 算法更新 f_i 的时间复杂度每次为 $O(ni)$, 则对于学习有 k 个成分的混合时, 其花费总的时间复杂度为 $O\left(\sum_{i=1}^k ni\right) \in O(nk^2)$ 。这比

传统的 EM 算法慢一个因子 k , 但如果用传统的 EM

算法学习 $\{1, \dots, k\}$ 个成分的混合序列时,其计算复杂度也为 $O(nk^2)$ 。而 SMEM 算法则因为要进行成分的分裂与融合,故其计算复杂度为 $O(nk^3)^{[8]}$ 。

4 基于综合特征的图像分割

4.1 综合特征的提取

特征提取是图像分割中首要的工作,根据特征的作用域可将特征提取方法分为以下两类:全局特征提取(即在整幅图像中提取特征)和局部特征提取(即提取图像中每个像素或每个区域块的特征)。为了减少计算复杂度,由于本文是采用 4×4 的图像块为图像分割的最小单位,因此,特征提取的最小单位也是 4×4 的图像块。本文提取的是 $L^*u^*v^*$ 空间的颜色特征、小波纹理特征及位置特征。

(1) 颜色特征

RGB 颜色空间是一种常见的颜色表示法,但是 RGB 颜色空间与人眼的感知差异很大。因此本文采用了较能符合人眼感知特性的 $L^*u^*v^*$ 颜色空间。 $L^*u^*v^*$ 颜色空间是由 RGB 颜色空间经过变换得到的, X_n, Y_n, Z_n (下角 n 代表 new,下同)为 XYZ 空间的颜色值 X, Y, Z 的对应参考白色,其转换公式为^[9]

$$\begin{aligned} X &= 0.409R + 0.310G + 0.200B \\ Y &= 0.177R + 0.813G + 0.010B \\ Z &= 0.000R + 0.010G + 0.990B \end{aligned}$$

$$L^* = \begin{cases} 116 \left(\frac{Y}{Y_n} \right)^{1/3} - 16 & \left(\frac{Y}{Y_n} \right) > 0.008 856 \\ 903.3 \left(\frac{Y}{Y_n} \right) & \left(\frac{Y}{Y_n} \right) \leq 0.008 856 \end{cases} \quad (16)$$

$$u^* = 1.3L^* (\bar{u} - \bar{u}_n)$$

$$v^* = 1.3L^* (\bar{v} - \bar{v}_n)$$

其中,

$$\begin{cases} \bar{u} = 4X / (X + 15Y + 3Z) & \bar{u}_n = 4X_n / (X_n + 15Y_n + 3Z_n) \\ \bar{v} = 9X / (X + 15Y + 3Z) & \bar{v}_n = 9X_n / (X_n + 15Y_n + 3Z_n) \end{cases}$$

对于小块的颜色特征,可直接采用小块里的各个像素的 L^*, u^*, v^* 的颜色均值。设小块的 16 个点从上至下,从左至右的标号为 $1, \dots, 16$, 则该小块的颜色特征 L^*, U^*, V^* 的计算公式为

$$L^* = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} L_i^*, U^* = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} u_i^*, V^* = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} v_i^* \quad (17)$$

(2) 纹理特征

由于小波变换能提取图像的高频信息,因此,它非常适合于提取图像的纹理特征。由于 Daubechies

小波具有紧支性、正交性、连续性,因此已在图像处理领域得到了广泛的应用。文中,小波变换的对象是各个 4×4 的块。一次小波变换后,一个 4×4 的块分解成 4 个频带,低频频带 LL 及 3 个高频频带 HL, LH, HH, 每个频带包含 2×2 个系数(见图 1),不同频带的小波系数表示不同方向信号的变化。文章提取 3 个高频频带的小波能量作为纹理特征^[10]。

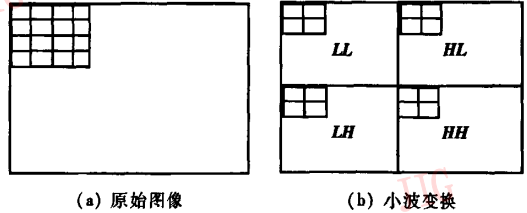


图 1 小波变换示意图

Fig. 1 Decomposition of images by wavelet transforms

以频带 HL 为例,假设其对应的小波系数为 $\{c_{k,l}, c_{k,l+1}, c_{k+1,l}, c_{k+1,l+1}\}$, 则对应的特征为

$$FE = \left(\frac{1}{4} \sum_{l=0}^1 \sum_{j=0}^1 c_{k+i,l+j}^2 \right)^{1/2} \quad (18)$$

即求该频带的小波系数的二阶矩的均值,对于频带 LH, HH 的计算公式类似上式。

(3) 位置特征

位置特征就是将图像分成 4×4 的块后,其对应的块的坐标为 (c_i, d_j) , 设 M, N 为分割图像的高度与宽度,则

$$c_i = \sum_{j=1}^{[M/4]} i, d_j = \sum_{i=1}^{[N/4]} j \quad (19)$$

4.2 基于 Greedy EM 的图像分割

结合上面的介绍,具体的基于 Greedy EM 的图像分割算法步骤如下:

- (1) 对输入的图像进行颜色、纹理、位置特征的提取,先得到 8 维综合特征矢量;
- (2) 采用 t 混合模型对提取的图像特征进行建模;
- (3) 利用 Greedy EM 算法,通过计算估计参数 θ 来得到每个像素属于各类别的后验概率;
- (4) 标记图像(分割):根据贝叶斯最小错误率准则对图像进行标记,即,如果

$$y_i = \underset{k}{\operatorname{argmax}} \alpha_k P_i(x_i; \mu_k, \Sigma_k, \gamma_k) \quad (20)$$

那么就认为与观测样本 x_i 对应的像素就属于 y_i , 即第 k 类,标记为 k。这样通过上述几步就可以把图像的各个像素划分到其所属的类别,也就达到

自适应图像分割的目的。

5 实验结果及分析

本文进行了两组实验,图 2 是对高斯混合和 t 混合的 Greedy EM 算法进行的比较实验结果。图 3、图 4 是对 t 混合下传统 EM 算法,SMEM 算法和 Greedy EM 算法进行图像分割的比较实验结果。

一般来讲,可对图像分割的结果以人的主观判决作为评价准则。因为对大多数图像处理问题而言,最后都是依赖于人的视觉来进行。本文针对分割算法能否将图像分割出有意义的区域(目标和背景)及能否自适应进行区域的选择,对分割的质量进行了评价,从而为进一步进行基于区域的图像检索研究提供了性能保证,而算法的执行效率则利用实验法给出。



图 2 本文算法与基于 Gaussian 混合的 Greedy EM 算法的分割结果
Fig.2 The segmentation results by Greedy EM of t and Gaussian

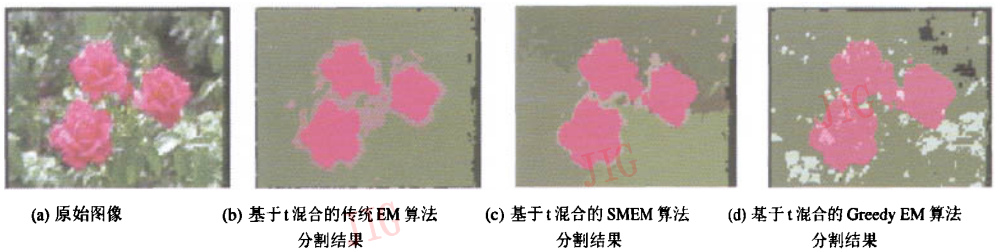


图 3 花卉图像不同算法的分割结果
Fig.3 The different segmentation results of flowers

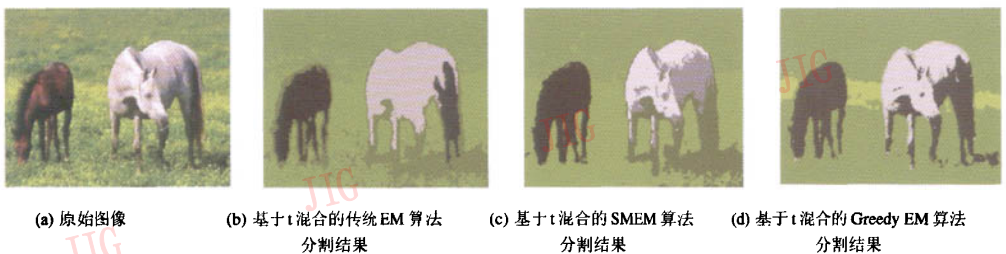


图 4 马场图像不同算法的分割结果
Fig.4 The different segmentation results of horses

图 2、图 3、图 4 的分割结果没有做任何的后处理操作。结果图中,区域颜色是其内部点的平均颜色。

从图 2 可见,用 t 混合模型来建模特征比用高斯混合模型建模特征时,结果更加平滑,由于其能消除一些噪声的影响,从而使目标更为明显,如

图 2(b)中将图像分成马、栅栏和绿草地,这是由于 t 混合模型具有鲁棒性的缘故。

从图 3、图 4 两例分割结果可见,传统的 EM 算法对于目标的分割效果较差,如分割出的花和马的轮廓模糊,且背景比较杂乱,由于传统 EM 算法对于初始值的选择比较敏感,并可能收敛到局部最大值

点,因此结果不尽人意。用 SMEM 算法和 Greedy EM 算法分割的结果都还比较满意,且有一定的语义区域,例如对于图像中的花和马的分割结果都好,但 SMEM 算法对于背景的分割,如图 3(c)将背景分割成几个区域,而图 4(c)则没有分割出小黄花区域,虽然用 Greedy EM 算法进行分割时,图像看起来有些细小区域,这是由于没有后处理的原因,在进行图像检索的应用中,若要进行区域的合并时,则这些区域是很容易平滑掉的。另外,由于 SMEM 算法要进行反复的分裂和融合操作,因此运算速度远远不如 Greedy EM 算法。如对于上述 256×384 大小的图像,在 512MHz Pentium IV 机上用 SMEM 算法进行图像分割平均需要 20s,而采用 Greedy EM 算法平均只需要 10s。

实验结果还表明, Greedy EM 算法具有贪婪性,其能够自适应地选择成分数,即能够自适应地得到分割的区域数,所以能适应各种类型的图像。因为 t 混合模型具有鲁棒性,故该文的分割方法能有效地融合颜色特征、纹理特征和空间位置特征。综合上面的实验可知,对普通的图像来说,无论是目标明显的图像,还是目标和背景没有明显边界的图像,基于 t 混合模型的 Greedy EM 算法一般都能分割出有意义的区域,这样的结果为将来进行基于区域的图像检索提供了性能保证。下一步将对算法进行进一步的改进,以提高运算速度,同时将分割的结果应用到图像检索中。

参考文献 (References)

- 1 McLachlan G J, Peel D. *Finite Mixture Models* [M]. New York: Wiley, 2000.
- 2 Dempster A, Laird N M, Rubin D B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm[J]. *Journal of Royal Statistical Society, Series B*, 1977, 39(1): 1 ~ 38.
- 3 Ueda N, Nakano R, Chahramani Z, et al. SMEM algorithm for mixture models [J]. *Neural Computation*, 2000, 12 (10): 2109 ~ 2128.
- 4 Zhang Z H, Chen C B, Sun J, et al. EM algorithms for Gaussian mixtures with split and merge operation [J]. *Pattern Recognition*, 2003, 36(9): 1973 ~ 1983.
- 5 Figueiredo M A T, Jain A K. Unsupervised learning of finite mixture models [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2002, 24(3): 381 ~ 396.
- 6 McLachlan G, Krishna J T. *The EM Algorithm Extensions* [M]. New York: Wiley, 1977.
- 7 Peel D, McLachlan G J. Robust mixture modeling using the t distribution [J]. *Statistics and Computing*, 2000, 10 (4): 339 ~ 348.
- 8 Verbeek J J, Vlassis N, Kroese B. Efficient greedy learning of Gaussian mixture models [J]. *Neural Computation*, 2003, 15 (2): 469 ~ 485.
- 9 Plataniotis K N, Venetsanopoulos A N. *Color Image Processing and Application* [M]. Berlin: Springer, 2000.
- 10 Wang J Z, Li J, Wiederhold G. Simplicity: Semantics-sensitive integrated matching for picture libraries [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2001, 23 (9): 947 ~ 963.